



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

- Sistemas con varias entradas y salidas consideradas con peso análogo.

Contenido:

- 4.1 Introducción
- 4.2 Descripción de Sistemas multivariables.
 - Concepto de interacción.
 - Método Bristol.
- 4.3 Emparejamiento de variables controladas y manipuladas.
- 4.4 Sintonización de controladores.
 - Sistemas 2x2.
- 4.5 Desacoplamiento.
 - Total y parcial.



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

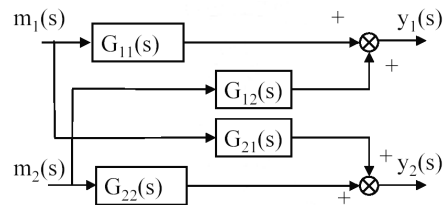
- Definición de sistema multivariable:
 - Son sistemas con varias entradas y salidas, en los que una entrada afecta a varias salidas y recíprocamente una salida es afectada por varias entradas.
- Técnicas:
 - Representación externa (fdt) o clásica.
 - Representación interna, o en el espacio de estados o moderna.





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables



$$y_1(s) = G_{11}(s) m_1(s) + G_{12}(s) m_2(s)$$
$$y_2(s) = G_{21}(s) m_1(s) + G_{22}(s) m_2(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \quad M(s) = \begin{bmatrix} m_1(s) \\ m_2(s) \end{bmatrix} \quad G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

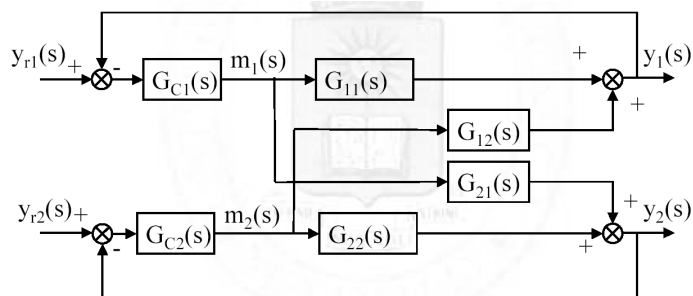
$$Y(s) = G(s) M(s)$$



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

- Concepto de Interacción:
Efecto de un lazo de control sobre otro lazo de control, rebotando el efecto sobre el lazo original.



e.g.: +y1 > -m1 > -y2 > +m2 > y1+





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

- Análisis del efecto dinámico de las interacciones:
- Sistema 2x2 comparados sin lazo 2:

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ M_1(s) \end{pmatrix}_S = G_{11}(s)$$

- Con lazo 2:

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ M_1(s) \end{pmatrix}_M = G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)G_{C2}(s)}{1 + G_{C2}(s)G_{22}(s)}$$

- No se pueden sintonizar los controladores de cada lazo de forma independiente.
- Al hacerlo puede ocurrir de todo si se cierra el lazo: desde mejorar (raro) hasta volverse inestable.
- Es necesaria una sintonización simultánea.



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

- Evaluación de las interacciones:
En un sistema nxn tenemos n! posibles combinaciones.
- Método BRISTOL de ganancias relativas: permite evaluar las interacciones entre lazos en régimen permanente.
 - Definición de la matriz de ganancias relativas.
 - Cálculo de la matriz de ganancias relativas.
 - Análisis de la matriz de ganancias relativas.
 - Ejemplo.
- Escoger –de momento- la combinación de lazos con menor interacción entre sí.





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

Método BRISTOL:

Definición de la matriz de ganancias relativas.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} G_{ij}(s) | \text{ todos los lazos abiertos}}{\lim_{s \rightarrow 0} G_{ij}(s) | \text{ resto de los lazos cerrados}} = \frac{K_{ij} | m_k=0, k \neq j}}{K_{ij} | y_k=0, k \neq i}} = \frac{\partial y_i / \partial m_j | m_k=\text{cte}, k \neq j}}{\partial y_i / \partial m_j | y_k=\text{cte}, k \neq i}}$$



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

Método BRISTOL:

Cálculo de la matriz de ganancias relativas.

• Propiedad:

- La suma de los elementos de cualquier fila o columna es 1:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{ki} = \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} = 1$$

• A partir de las ecuaciones del sistema. (Aplicando la definición de ganancia estática)

• A partir de la matriz de ganancias estáticas:

$$\Lambda = \mathbf{K} \times (\mathbf{K}^{-1})^T$$

donde x es el producto de Hadamard (elemento por elemento)





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

Método BRISTOL:
Análisis de la matriz de ganancias relativas.

- $\lambda_{ij} = 1$ K_{ij} independiente de la apertura o cierre: No hay interacción.
- $\lambda_{ij} = 0$ M_j no afecta a y_i : el control lo realizarían el resto de lazos.
- $0 < \lambda_{ij} < 1$ La interacción da más ganancia. Cuanto más lejos de 1 más interacción
- $1 < \lambda_{ij}$ La interacción atenúa. Cuanto más lejos de 1 más interacción. El conjunto de lazos se oponen a m_j .
- $\lambda_{ij} = \infty$ No es posible el control con el resto de lazos cerrados. (Anulan la acción de m_j .)
- $\lambda_{ij} < 0$ Estabilidad depende de si se abren o cierran otros lazos.




TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.2 Descripción de sistemas multivariables

Método BRISTOL:
Análisis de la matriz de ganancias relativas.

- $\lambda_{ij} = 1$ K_{ij} independiente de la apertura o cierre: No hay interacción.
- $\lambda_{ij} = 0$ M_j no afecta a y_i : el control lo realizarían el resto de lazos.
- $0 < \lambda_{ij} < 1$ La interacción da más ganancia. Cuanto más lejos de 1 más interacción
- $1 < \lambda_{ij}$ La interacción atenúa. Cuanto más lejos de 1 más interacción. El conjunto de lazos se oponen a m_j .
- $\lambda_{ij} = \infty$ No es posible el control con el resto de lazos cerrados. (Anulan la acción de m_j .)
- $\lambda_{ij} < 0$ Estabilidad depende de si se abren o cierran otros lazos.





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE
4.3 Emparejamiento de variables controladas y manipuladas

Obtención de $\Lambda = K \times (K^{-1})^T$

↓


Criterios restrictivos

↓


Criterios de prioridad

↓

Criterios complementarios




M. Herrera Centro de Procesos Industriales 2004/05 11



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE
4.3 Emparejamiento de variables controladas y manipuladas

Criterios restrictivos:

- No formar lazos de control con ganancia relativa negativa.
- No formar lazos de control con variables con ganancia relativa infinita.
- No formar lazos de control con variables con ganancia relativa nula.



M. Herrera Centro de Procesos Industriales 2004/05 12



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.3 Emparejamiento de variables controladas y manipuladas

Criterios de prioridad:

- Controlar las variables más importantes con aquellas variables de entrada con las que tengan una dinámica más rápida sin respuesta inversa.
 - Puede implicar la desintonización de los poco importantes.
- Cerrar lazos de control con las ganancias estáticas relativas más próximas a 1.



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.3 Emparejamiento de variables controladas y manipuladas

Criterios complementarios:

- Simular las distintas alternativas: puede suponer un esfuerzo considerable.
- Emparejar variables con ganancia relativa ante perturbación baja: Para el caso de 2x2:

$$\boxed{IE_{IM} = IE_{IS} F_I \lambda'_{11}} \quad F_I = \frac{(K_{C1}/t_{I1})_S}{(K_{C1}/t_{I1})_M} \quad \lambda'_{11} = \lambda_{11} \left[1 - \frac{K_{d2}K_{12}}{K_{d1}K_{22}} \right]$$

- IE bajo no garantiza una calidad de control aceptable
- el emparejamiento depende de la perturbación considerada





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.4 Sintonización de controladores

- Disminuir las interacciones por desintonización de los controladores.
 - Es la solución más sencilla pero la menos efectiva.
 - Reducimos K y aumentamos T_i.
 - Primero los menos importantes y luego los importantes.
- Reglas de ajuste de McAvoy para sistemas 2x2 con reguladores PI.
 - Difícil extensión a sistemas de orden superior.



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.4 Sintonización de controladores

Reglas de ajuste de McAvoy para sistemas 2x2 con reguladores PI.

$$P(s) = 1 + G_{C1}(s)G_{11}(s) \left[\frac{1 + G_{C2}(s)G_{22}(s)/\lambda_{11}(s)}{1 + G_{C2}(s)G_{22}(s)} \right] \quad \lambda_{11}(s) = \frac{1}{1 + \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)}}$$

- si el lazo 1 es mucho más rápido que el 2: $P(s) \approx 1 + G_{C1}(s)G_{11}(s)$
 \Rightarrow puede sintonizarse independientemente
- si el lazo 1 es mucho más lento que el 2: $P(s) \approx 1 + G_{C1}(s)G_{11}(s)/\lambda_{11}$
 \Rightarrow la ganancia del controlador tiene que multiplicarse por λ_{11} dejando inalterado el t_I
- ambos lazos tienen dinámicas parecidas:

$$K_{CM} = \begin{cases} > 0.5K_{CS} & 0.5 < \lambda < 1.5 \\ 0.5K_{CS} & \lambda \geq 1.5, \lambda \leq 0.5 \end{cases} \quad T_{ICM} = \begin{cases} 2T_{ICS} & \lambda \leq 0.5 \\ < 2T_{ICS} & 0.5 < \lambda < 1 \\ T_{CS} & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

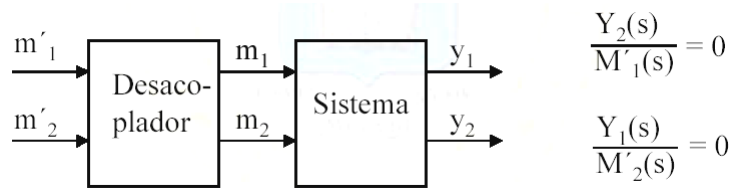




TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.5 Desacoplamiento

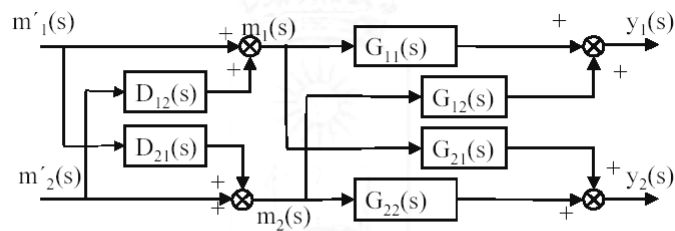
- Hasta ahora es válida la sintonización si las interacciones no son muy fuertes.
- El desacoplamiento permite trabajar con el sistema como si fuera SISO.
- Objetivo: Eliminar o reducir las interacciones de cada variable de entrada con las variables de salida distintas de la que controla.
- Estructura (2x2):



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.5 Desacoplamiento

- Desacoplamiento lineal total:



$$D_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \quad D_{12}(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \quad \mathbf{D}(s) = \begin{pmatrix} 1 & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & 1 \end{pmatrix}$$





TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.5 Desacoplamiento

Desacoplamiento lineal total:

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{D}(s) = \begin{pmatrix} \frac{G_{11}(s)}{\lambda_{11}(s)} & 0 \\ 0 & \frac{G_{22}(s)}{\lambda_{22}(s)} \end{pmatrix}$$

- Las fdt de las ganancias relativas pueden aproximarse sin problema a su ganancia relativa estática.

$$\lambda_{ii}(s) \cong \lambda_{ii}$$

- Luego considerando el controlador sobre el lazo simple, bastará con multiplicar su ganancia por λ_{ii}



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE

4.5 Desacoplamiento

Desacoplamiento lineal total:

Problemas:

- Hay desacopladores no realizables:

$$D_{21}(s) = - \frac{K_{21}(t_{22}s+1)}{K_{22}(t_{21}s+1)} e^{-(t_{m21}-t_{m22})s}$$

- Los errores en el modelado pueden afectar gravemente a la estabilidad y comportamiento del sistema. Por ello es desaconsejada la utilización de desacopladores cuando tenemos ganancia relativa elevada.

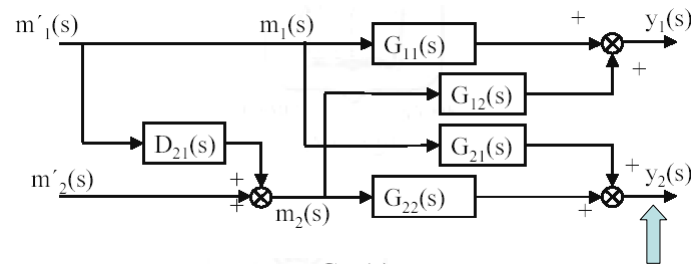




TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE 4.5 Desacoplamiento

Desacoplamiento lineal parcial:

- Objetivo: Eliminar (2x2) o reducir la interacción mediante el desacoplo de la salida más importante del resto de las entradas.



$$D_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \quad D_{12}(s) = 0$$



TEMA 4: CONTROL MULTIVARIABLE 4.5 Desacoplamiento

Desacoplamiento lineal parcial:

- La sintonización del lazo de control de la variable importante es independiente de las otras fdt del sistema. (Son perturbaciones).
- La sintonización de los otros lazos de control dependerá del resto de fdt del sistema ajenas al lazo principal.
- El desacoplo es mucho menos sensible a los errores en el modelo por lo que está más extendido.

